TD10

RÉVISIONS VARIABLES DISCRÈTES, DÉNOMBREMENT.

1. Variables aléatoires discrètes.

Exercice 1

Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un avec remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note X le nombre de tirages ainsi effectués.

1. Déterminer la loi de X.

2. Reconnaître cette loi.

3. Même question si on effectue les tirages sans remise.

Exercice 2

On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

2. Calculer $E(X)$ à l'aide de la formule de Vandermonde : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

Exercice 3

D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$), on extrait simultanément 3 jetons. Soit X la variable aléatoire égale au numéro tiré dont la valeur est intermédiaire entre les deux autres.

1. Quelle est la loi de X ?

2. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} k^3 = \left(\frac{N(N+1)}{2}\right)^2$.

b. Calculer $E(X)$.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité.

On pourra remarquer que : $\forall k \geqslant 1$, $\dfrac{4}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{2}{k} - \dfrac{4}{k+1} + \dfrac{2}{k+2}$.

2. **a.** Déterminer deux rées a et b tels que $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2}$ pour tout $k \geqslant 0$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

b. Calculer $E(X)$

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On considère la variable aléatoire Y définie de la façon suivante : si X prend une valeur paire, alors Y vaut $\dfrac{X}{2}$, et si X prend une valeur impaire, alors Y vaut $\dfrac{(X+1)}{2}$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 6

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier naturel k, $P(X = k) = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^k$.
On pose $Y = X + 1$ et $Z = 2^Y$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. En déduire sans effort l'espérance et la variance de X.

3. Calculer l'espérance et la variance de Z si c'est possible.

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = e^{-\alpha k}(e^{\alpha} - 1)$ avec $\alpha > 0$.

1. Vérifier que ceci définit bien une loi de probabilité.

2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8

On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a. On pose $Y = e^{-X}$. Calculer, si c'est possible, $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 9

Un joueur lance une pièce équilibré jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers ($n \geq 1$) pour obtenir ce premier pile, on lui fait alors tirer un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.

Exprimer la probabilité que le joueur gagne sous forme d'une somme.

Exercice 10

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 10 boules noires. On note X le nombre de boules rouges obtenues lors des 6 premiers tirages, Y le numéro d'apparition du premier tirage donnant une boule rouge et Z le numéro d'apparition (pour la première fois) d'une boule d'une même couleur que la première boule tirée.

1. Donner les lois de X et Y.

2. **a.** Donner $Z(\Omega)$.

b. En utilisant un système complet d'événements issus du premier tirage, donner la loi de Z.

c. Calculer $E(Z)$.

Exercice 11

La fonction de répartition d'une variable aléatoire F_X d'une variable aléatoire X est donnée par

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si} t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} -1 \leqslant t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} 1 \leqslant t < \\ 1 & \text{si} t > 2 \end{cases}.$$

1. Dessiner le graphe de F_X.

2. déterminer la loi de X.

2. Dénombrement

Soit E un ensemble à n éléments.

1. Une k-liste ou une liste de longueur k est un k-uplet d'éléments de E.

2. Un k-arrangement est une liste de E dont les éléments sont deux à deux distincts.

3. Une combinaison de k éléments parmi n est une partie de k éléments de E.

La différence fondamentale entre les listes et les parties réside dans le fait que pour les listes, on tient compte de l'ordre des éléments. Plus précisément, la liste à deux éléments à (e_1, e_2) est différente de la liste (e_2, e_1) tandis que la partie $\{e_1, e_2\}$ est égale à la partie $\{e_2, e_1\}$.

Tous les problèmes de dénombrements se ramènent, soit à faire un décompte à la main, soit à utiliser une ou plusieurs des formules suivantes.

Exercice 12 ***Préliminaires.***

1. Rappeler la formule qui donne le nombre de listes de longueur k dans un ensemble E à n éléments.

2. Même questions pour les arrangements.

3. Même question pour les parties.

Exercice 13

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire k boules dans cette urne

1. avec remise et on tient compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?

2. sans remise et on tient compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?

3. avec remise et on ne tient pas compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?

4. sans remise et on ne tient pas compte de l'ordre d'apparition des boules. Combien de possibilités de tirages obtient-on ?

Exercice 14

Combien le mot **poire** a-t-il d'anagrammes ? Combien le mot **anagramme** a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 15

On dispose d'un jeu de 32 cartes avec lequel on joue au Poker : on distribue à un joueur une main de 5 cartes.

1. Combien de mains différentes peut-il recevoir ?

2. Combien contiennent un carré (4 cartes d'une même hauteur et une autre carte) ?
3. Combien contiennent une quite floche (5 cartes consécutives d'une m'eme couleur) ?
4. Combien contiennent une couleur (5 cartes d'une même couleur) ?
5. Combien contiennent un full (3 cartes d'une même hauteur et deux autres d'une même hauteur) ?
6. Combien contiennent une paire et rien de mieux ?
7. Combien contiennent exactement un roi ?
8. Combien contiennent au moins deux carreaux ?
9. Combien contiennent exactement deux piques et deux coeurs ?
10. Combien contiennent exactement un roi et deux trèfles ?

Exercice 16

On joue au loto en cochant dans une grille 6 numéros parmi les numéros $1{,}2{,}\cdots, 49$. On place ensuite 49 boules numérotées de 1 à 49 dans une urne et on extrait 6 de ces boules. On obtient ainsi les numéros gagnants. L'ordre ne compte pas.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles.
2. Combien de tirages fournissent exactement 1,2,3,4,5,6 numéros gagnants ? En supposant que les tirages sont équiprobables, quelle est la probabilité de gagner au loto ?